

۱ جدول زیر پول توجیبی (ده هزار ریال) هفتگی پنج دوست نزدیک مینا و مریم را نشان می‌دهد.

(الف) میانگین و میانۀ پول توجیبی را برای دوستان مریم و مینا محاسبه کنید.

(ب) انحراف معیار پول توجیبی را برای دوستان مریم و مینا محاسبه کنید.

(پ) برنامه‌ریزی برای یک سفر یک روزه با دوستان برای مینا ساده‌تر است یا مریم؟

مینا	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
مریم	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵

پاسخ:

(الف)

$$\bar{x} = \frac{۱۵ + ۲۰ + ۲۵ + ۳۰ + ۳۵}{۵} = \frac{۱۲۵}{۵} \rightarrow \boxed{\bar{x} = ۲۵}$$

$$\bar{y} = \frac{۲۳ + ۲۴ + ۲۵ + ۲۶ + ۲۷}{۵} = \frac{۱۲۵}{۵} \rightarrow \boxed{\bar{y} = ۲۵}$$

(ب)

$$\sigma_x^2 = \frac{(۱۵ - ۲۵)^2 + (۲۰ - ۲۵)^2 + (۲۵ - ۲۵)^2 + (۳۰ - ۲۵)^2 + (۳۵ - ۲۵)^2}{۵} = \frac{۲۵۰}{۵} = ۵۰$$

$$\rightarrow \boxed{\sigma_x = \sqrt{۵۰} = ۵\sqrt{۲}}$$

$$\sigma_y^2 = \frac{(۲۳ - ۲۵)^2 + (۲۴ - ۲۵)^2 + (۲۵ - ۲۵)^2 + (۲۶ - ۲۵)^2 + (۲۷ - ۲۵)^2}{۵} = \frac{۱۰}{۵} = ۲$$

$$\rightarrow \boxed{\sigma_y = \sqrt{۲}}$$

(پ) برنامه‌ریزی سفر با دوستان مینا ساده‌تر است زیرا انحراف معیار کمتری دارند.

۲ درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید.

(الف) اگر مقدار ثابت C از داده‌ها کم شود، انحراف معیار به اندازه \sqrt{C} کاهش می‌یابد.

(ب) اگر مقدار ثابت C به داده‌ها اضافه شود، ضریب تغییرات بزرگ‌تر می‌شود.

(پ) اگر مقدار ثابت $\frac{1}{C}$ در داده‌ها ضرب شود، انحراف معیار $\frac{1}{C}$ برابر می‌شود.

(ت) اگر مقدار ثابت C در داده‌ها ضرب شود، ضریب تغییر ثابت می‌ماند.

پاسخ: الف) نادرست

ب) نادرست

پ) نادرست، زیرا انحراف معیار $\left|\frac{1}{C}\right|$ برابر می‌شود.

ت) درست



۳ احتمال اینکه رویا در درس ریاضی قبول شود، دو برابر احتمال آن است که دوستش در این درس قبول شود. اگر احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در درس ریاضی قبول شوند، برابر 0.625 باشد، رویا با چه احتمالی در این درس قبول خواهد شد؟
پاسخ:

پیشامد قبول شدن رویا در درس ریاضی $B =$ پیشامد قبول شدن رویا در درس ریاضی $A =$
دو پیشامد A و B مستقل از هم هستند در نتیجه: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(B) = x, P(A) = 2x$$

$$P(A \cup B) = 0.625 \rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{625}{1000}$$

$$\rightarrow 2x + x - (2x \cdot x) = \frac{5}{8} \rightarrow 3x - 2x^2 = \frac{5}{8} \rightarrow 24x - 16x^2 = 5$$

$$\rightarrow 16x^2 - 24x + 5 = 0 \rightarrow (4x)^2 - 6(4x) + 5 = 0 \rightarrow (4x - 1)(4x - 5) = 0$$

$$\begin{cases} 4x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{4} > 1 \text{ غیرقابل قبول} \\ 4x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{4}, 2x = \frac{1}{2} \rightarrow P(A) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

۴ احمد به احتمال 0.7 در تیم بسکتبال مدرسه‌شان و به احتمال 0.8 در تیم ملی فوتبال نوجوانان انتخاب می‌شود. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید.
پاسخ:

الف

در هر دو تیم موردنظر انتخاب شود.

پاسخ:

$A =$ پیشامد انتخاب در تیم بسکتبال $\rightarrow P(A) = 0.7$
 $B =$ پیشامد انتخاب در تیم ملی فوتبال نوجوانان $\rightarrow P(B) = 0.8$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{7}{10} \times \frac{8}{10} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{56}{100}$$

ب

در هیچ کدام از دو تیم انتخاب نشود.

پاسخ:

$$\text{روش ۱: } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{10} + \frac{8}{10} - \frac{56}{100} \rightarrow P(A \cup B) = \frac{94}{100}$$

$$\rightarrow P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{94}{100} \rightarrow P(A \cup B)' = \frac{6}{100}$$

$$\text{روش ۲: } P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$

$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{8}{10} = \frac{2}{10}$$

$$\rightarrow P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B') = \frac{3}{10} \times \frac{2}{10} \rightarrow P(A' \cap B') = \frac{6}{100}$$

پ

فقط در تیم ملی فوتبال انتخاب شود.



پاسخ:

$$P(B - A) = P(B \cap A') = P(B) \cdot P(A') = \frac{8}{100} \times \frac{3}{100} \rightarrow P(B - A) = \frac{24}{10000}$$

ت فقط در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

پاسخ:

$$\text{روش ۱: } P(B - A) + P(A - B) = P(B \cap A') + P(A \cap B') = P(B) \cdot P(A') + P(A) \cdot P(B')$$

$$= \frac{8}{100} \times \frac{3}{100} + \frac{7}{100} \times \frac{2}{100} = \frac{24}{10000} + \frac{14}{10000} \rightarrow P(B - A) + P(A - B) = \frac{38}{10000}$$

$$\text{روش ۲: } P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{94}{10000} - \frac{56}{10000} \rightarrow P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{38}{10000}$$

ث حداقل در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

پاسخ:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{100} + \frac{8}{100} - \frac{56}{10000} \rightarrow P(A \cup B) = \frac{94}{10000}$$

۵ کارخانه‌ای دو نوع لاستیک تولید می‌کند. میانگین طول عمر برای نوع A و B به ترتیب ۱۱۰۰۰ کیلومتر و ۱۰۰۰۰ کیلومتر و انحراف معیار برای نوع A و B به ترتیب ۲۰۰۰ کیلومتر و ۱۰۰۰ کیلومتر است. کدام نوع لاستیک بهتر است؟

پاسخ:

$$cv_A = \frac{\sigma_A}{\bar{X}_A} = \frac{2000}{11000} = \frac{2}{11} \approx 0,18$$

$$cv_B = \frac{\sigma_B}{\bar{X}_B} = \frac{1000}{10000} = \frac{1}{10} = 0,1$$

لاستیک نوع B بهتر است؛ چون ضریب تغییرات کمتری دارد.

۶ در جدول زیر ارتفاع از سطح دریا برای بعضی از شهرهای استان مرکزی و کهگیلویه و بویراحمد دیده می‌شود. (راهنمایی: $1m = 3,281ft$ ، فوت: ft ، متر: m)

شهر	مرکزی				کهگیلویه و بویراحمد		
	اراک	محلان	خمین	شازند	ياسوج	دهدشت	دنا
فاصله از سطح دریا	۱۷۰۸(m)	۱۷۷۵(m)	۱۸۳۰(m)	۱۹۲۰(m)	۶۱۳۵,۴۷ (ft)	۳۲۴۸,۱۹(ft)	۷۲۱۸,۲۰ (ft)

الف) میانگین ارتفاع از سطح دریا در شهرهای استان مرکزی چقدر است؟

ب) انحراف معیار از سطح دریا در شهرهای استان مرکزی چقدر است؟

پ) ارتفاع از سطح دریا برای شهرهای کدام استان بیشتر است؟

پاسخ:

الف)

$$\bar{X} = \frac{1708 + 1775 + 1830 + 1920}{4} \rightarrow \bar{X} = 1808,25m$$

ب)

$$\sigma^2 = \frac{(1708 - 1808,25)^2 + \dots + (1920 - 1808,25)^2}{4} = 6029,19$$

$$\rightarrow \sigma = ۷۷,۶۵$$

(پ)

$$\bar{Y} = \frac{۶۱۳۵,۴۷ + ۳۲۴۸,۱۹ + ۷۲۱۸,۲۰}{۳} \rightarrow \bar{Y} = ۵۵۳۳,۹۵ft$$

$$\rightarrow \bar{Y} = ۱۶۸۶,۶۷m$$

میانگین ارتفاع از سطح دریا برای شهرهای استان مرکزی بیشتر است.

۷ میانگین، میانه و انحراف معیار نرخ تورم (مراجعه به خواندنی) سال‌های ۹۴ - ۸۴ را بر اساس جدول زیر محاسبه کنید.

سال	۱۳۸۴	۱۳۸۵	۱۳۸۶	۱۳۸۷	۱۳۸۸	۱۳۸۹	۱۳۹۰	۱۳۹۱	۱۳۹۲	۱۳۹۳	۱۳۹۴
نرخ تورم	۱۰,۴	۱۱,۹	۱۸,۴	۲۵,۴	۱۰,۸	۱۲,۴	۲۱,۵	۳۰,۵	۳۴,۷	۱۵,۶	۱۱,۹

پاسخ:

$$\bar{X} = \frac{۱۰,۴ + ۱۱,۹ + ۱۸,۴ + ۲۵,۴ + ۱۰,۸ + ۱۲,۴ + ۲۱,۵ + ۳۰,۵ + ۳۴,۷ + ۱۵,۶ + ۱۱,۹}{۱۱}$$

$$\rightarrow \bar{X} = \frac{۲۰۳,۵}{۱۱} \rightarrow \bar{X} = ۱۸,۵ \text{ میانگین}$$

برای بدست آوردن میانه، داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$۱۰,۴ - ۱۰,۸ - ۱۱,۹ - ۱۱,۹ - ۱۲,۴ - \underline{\underline{۱۵,۶}} - ۱۸,۴ - ۲۱,۵ - ۲۵,۴ - ۳۰,۵ - ۳۴,۷$$

$$Q_2 = ۱۵,۶ \text{ میانه}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{11} (x_i - \bar{X})^2}{N} = \frac{(۱۰,۴ - ۱۸,۵)^2 + (۱۰,۸ - ۱۸,۵)^2 + \dots + (۳۴,۷ - ۱۸,۵)^2}{۱۱}$$

$$\sigma^2 = \frac{۷۲۰,۷}{۱۱} = ۶۵,۵۲ \rightarrow \sigma = ۸,۰۹ \text{ انحراف معیار}$$

 ۸ فرض کنید A و B دو پیشامد ناتهی مستقل از یکدیگرند.

 الف) نشان دهید A' و B مستقل‌اند.

 ب) با توجه به الف) نشان دهید A' و B' نیز مستقل‌اند.

پاسخ:

$$\text{مستقل } B, A \rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\text{الف) } P(B) \cdot P(A') = P(B)(1 - P(A)) = P(B) - P(B) \cdot P(A)$$

$$= P(B) - P(A \cap B) = P(B - A) = P(B \cap A')$$

$$\rightarrow P(B) \cdot P(A') = P(B \cap A') \rightarrow A' \text{ و } B \text{ مستقل هستند}$$

$$\text{ب) } P(A') \cdot P(B') = (1 - P(A))(1 - P(B)) = 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B)$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$$

$$= 1 - P(A \cup B) = P(A \cup B)' = P(A' \cap B')$$



$$\rightarrow P(A') \cdot P(B') = P(A' \cap B') \rightarrow A' \text{ و } B' \text{ مستقل هستند}$$

۹ یک سکه را سه بار پرتاب می کنیم. احتمال رو آمدن سکه در پرتاب سوم را به دست آورید، به شرط اینکه در دو پرتاب اول و دوم پشت ظاهر شده باشد.

پاسخ:

$$n(S) = ۸$$

$$A = \{(پ, پ, پ), (پ, پ, ر)\}$$

$$B = \{(پ, پ, ر), (پ, ر, ر), (ر, پ, ر), (ر, ر, ر)\}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{n(B \cap A)}{n(A)} = \frac{۱}{۲}$$

۱۰ در پرتاب یک تاس فرض کنید پیشامد A ظاهر شدن عدد زوج، پیشامد B ظاهر شدن عددی با مضرب ۳ و پیشامد C عددی بزرگتر از ۲ باشد. مستقل یا غیرمستقل بودن هر دو پیشامد را بررسی کنید.

پاسخ:

$$A = \{۲, ۴, ۶\} \rightarrow P(A) = \frac{۳}{۶}, B = \{۳, ۶\} \rightarrow P(B) = \frac{۲}{۶}, C = \{۳, ۴, ۵, ۶\} \rightarrow P(C) = \frac{۴}{۶}$$

$$A \cap B = \{۶\} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{۱}{۶} \rightarrow P(A \cap B) \stackrel{?}{=} P(A) \cdot P(B) \rightarrow \frac{۱}{۶} = \frac{۳}{۶} \times \frac{۲}{۶}$$

دو پیشامد A و B مستقل هستند.

$$A \cap C = \{۴, ۶\} \rightarrow P(A \cap C) = \frac{۲}{۶} \rightarrow P(A \cap C) \stackrel{?}{=} P(A) \cdot P(C) \rightarrow \frac{۲}{۶} = \frac{۳}{۶} \times \frac{۴}{۶}$$

دو پیشامد A و C مستقل هستند.

$$B \cap C = \{۳, ۶\} \rightarrow P(B \cap C) = \frac{۲}{۶} \rightarrow P(B \cap C) \stackrel{?}{=} P(B) \cdot P(C) \rightarrow \frac{۲}{۶} \neq \frac{۲}{۶} \times \frac{۴}{۶}$$

دو پیشامد B و C مستقل نیستند.

۱۱ ترکیبی از ۴ ماده شیمیایی داریم که دو تا از آنها مواد A و B هستند. احتمال واکنش نشان دادن ماده A ، $\frac{۱}{۵}$ و احتمال واکنش نشان دادن ماده B ، $\frac{۱}{۷}$ است. اگر ماده A واکنش نشان دهد، احتمال واکنش نشان دادن ماده B ، $\frac{۱}{۴}$ خواهد شد. با چه احتمالی، حداقل یکی از مواد A یا B واکنش نشان خواهد داد؟

پاسخ:

$$P(A) = \frac{۱}{۵}, P(B) = \frac{۱}{۷}, P(B|A) = \frac{۱}{۴}, P(A \cup B) = ?$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۵} = \frac{۱}{۲۰}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۷} - \frac{۱}{۲۰} = \frac{۲۸}{۱۴۰} + \frac{۲۰}{۱۴۰} - \frac{۷}{۱۴۰} \rightarrow P(A \cup B) = \frac{۴۱}{۱۴۰}$$

۱۲ دو تاس با هم پرتاب شده اند. احتمال آنکه هر دو عدد رو شده زوج باشند، به شرطی که بدانیم مجموع اعداد رو شده برابر ۸ است را به دست آورید.

پاسخ:

$$A = \{(۲, ۲)(۲, ۴)(۲, ۶)(۴, ۲)(۴, ۴)(۴, ۶)(۶, ۲)(۶, ۴)(۶, ۶)\}$$



$$\text{پیشامد مجموع اعداد رو شده برابر ۸} = B = \{(۲, ۶)(۳, ۵)(۴, ۴)(۵, ۳)(۶, ۲)\}$$

$$A \cap B = \{(۲, ۶)(۴, ۴)(۶, ۲)\}$$

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{۳}{۵} \rightarrow P(A|B) = \frac{۳}{۵}$$